

MATEMATYKA
Lista 5 (ciągłość funkcji, pochodne)

Zad 1. Zbadaj ciągłość następujących funkcji i określ rodzaj punktów nieciągłości :

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \in (1, +\infty), \\ x, & \text{gdy } x \in (-\infty, 1], \end{cases} & b) f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases} \\
 c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 6, & x = 3. \end{cases} & d) f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Zad 2. Dobierz parametry a, b, c tak, aby funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ była ciągła w swojej dziedzinie.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} & b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{1-x}, & x \neq 1 \\ 6b^2-b-5, & x = 1 \end{cases} \\
 c) f(x) = \begin{cases} 1 + \ln(1+x), & x > 0 \\ 2x - c, & x \leq 0 \end{cases} & d) f(x) = \begin{cases} (x+d)^2, & \text{gdy } x \in (-\infty, 0], \\ -x+1, & \text{gdy } x \in (0, +\infty), \end{cases}
 \end{array}$$

Zad 3. Wyznacz złożenie funkcji $f \circ g$ oraz $g \circ f$, jeśli

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = 2x, \quad g(x) = \frac{1}{x^2} & b) f(x) = x^6, \quad g(x) = \sqrt[3]{x} \\
 c) f(x) = (x+5)^2, \quad g(x) = x-2 & d) f(x) = e^x, \quad g(x) = \ln x \\
 e) f(x) = 2^x, \quad g(x) = \sin x & f) f(x) = x^4 + 4x, \quad g(x) = \sin x + 5
 \end{array}$$

Zad 4. Stosując reguły różniczkowania obliczyć pochodne

$$\begin{array}{llll}
 a) y = \frac{2x}{x+3}, & b) y = \frac{x^2-3}{x^2+3}, & c) y = x^2 \sin x, & d) y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, \\
 e) y = \operatorname{tg} \sqrt{x}, & f) y = x^2 \sin x, & g) y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}, & h) y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}, \\
 i) y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} & j) y = \sin^2 x + \sin x^2, & k) y = \frac{1+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}, & l) y = e^{\sqrt{\ln(x^2+4)}}, \\
 m) y = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{8} \sin^8 x, & n) y = (2\sqrt[3]{x^2} - x)(4\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^5} + x^2).
 \end{array}$$

Zad 5. Wyznaczyć pochodną drugiego rzędu funkcji

$$\begin{array}{lll}
 a) f(x) = \frac{2x+1}{3x-3}, & b) f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^5}, & c) f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{2x-3}}, \\
 d) f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1), & e) f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, & f) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}.
 \end{array}$$

Zad 6. Wyznaczyć wzór na n -tą pochodną funkcji

$$a) \sin x, \quad b) \cos x, \quad c) e^x, \quad d) \ln x, \quad e) x^{-1}.$$

Zad 7. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji

$$\begin{array}{lll}
 a) y = x^4 - 2x^2 + 5, & b) f(x) = 5x + \sin x, & c) f(x) = 2x^3 - 6x - 18x + 7, \\
 d) f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x, & e) f(x) = \frac{x^3+x}{x^4-x^2+1}, & f) f(x) = x^2 \ln x, \\
 g) f(x) = x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}, & h) f(x) = x^2 \ln x, & i) f(x) = \cos x + x.
 \end{array}$$

Zad 8. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

$$\begin{array}{lll}
 a) f(x) = 2x^3 - 3x^2, & b) f(x) = 5x + \sin x, & c) f(x) = 2x^3 - 6x - 18x + 7, \\
 d) f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x, & e) f(x) = \frac{x^3+x}{x^4-x^2+1}, & f) f(x) = x^2 \ln x, \\
 g) f(x) = x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}, & h) f(x) = x^2 \ln x, & i) f(x) = \cos x + x.
 \end{array}$$